Линейная регрессия

Пример

Пусть x — рост котика, а y — его вес.

Что мы знаем?

- чем крупнее котик, тем больший вес он имеет;
- котики одинакового роста могут иметь разный вес.

Выводы:

- для фиксированного роста котика x

  его вес $y = f(x)$ является случайной величиной;
- в среднем вес $f(x)$ возрастает при увеличении роста котика x.

Пример

Простая зависимость:

$$y = \theta_0 + \theta_1 x + \varepsilon,$$

x — рост котика,

y — вес котика,

θ_0, θ_1 — неизвестные параметры,

ε — случайная составляющая
с нулевым средним.

Зависимость

- **линейна по параметрам**,
- линейна по аргументу.

Более сложная зависимость:

$$y = \theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_2^2 + \varepsilon,$$

x_1 — рост котика,

x_2 — обхват туловища котика,

y — вес котика,

$\theta_0, \theta_1, \theta_2, \theta_3$ — неизвестные параметры,

ε — случайная составляющая
с нулевым средним.

Зависимость

- **линейна по параметрам**,
- квадратична по аргументам.

Модель линейной регрессии

Рассматриваем функциональную зависимость вида

$$y = y(x) = \theta_1 x_1 + \ldots + \theta_d x_d$$

$x_1, \ldots, x_d$ — признаки,

$\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_d)^T$ — вектор параметров.

Предполагаем, что данные соотносятся с этой зависимостью с некоторым шумом

$$Y_i = \theta_1 x_{i1} + \ldots + \theta_d x_{id} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{id})$ — признаки i-го объекта (обычно неслучайные),

ε_i — случайная ошибка (погрешности).

Модель линейной регрессии

Введем обозначения

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1d} \\ \dots & & \\ x_{n1} & \dots & x_{nd} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Матричная форма записи обучающих данных

$$Y = X\theta + \varepsilon.$$

$X \in \mathbb{R}^{n \times d}$ — матрица признаков,

$Y \in \mathbb{R}^n$ — таргет (отклик).

Матричный вид зависимости: $y(x) = x^T \theta$.

Замечание

Зависимость $y = y(x)$ должна быть **линейна по параметрам**,

но не обязана быть линейной по признакам.

Пусть $z_1, ..., z_k$ — набор "независимых" переменных.

Можно рассматривать модель

$$y(x) = \theta_1 x_1(z_1, ..., z_k) + ... + \theta_d x_d(z_1, ..., z_k),$$

где $x_j(z_1, ..., z_k)$ — некоторые функции (м.б. нелинейные).

Примеры:

- $x(z_1, ..., z_k) = 1;$
- $x(z_1, ..., z_k) = z_1;$
- $x(z_1, ..., z_k) = \ln z_1;$
- $x(z_1, ..., z_k) = z_1^2 z_2.$

Пример: Потребление мороженого

Предполагается линейная зависимость потребления мороженого в литрах на человека от среднесуточной температуры воздуха: $ic = \theta_0 + \theta_1 t$.

Получены данные

$$IC_i = \theta_0 + \theta_1 t_i + \varepsilon_i,$$

t_i — среднесуточная температура воздуха,

IC_i — потребление мороженого в литрах на чел.,

$\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ — случайное отклонение.

Пример: Потребление мороженого

Данные: $IC_i = \theta_0 + \theta_1 t_i + \varepsilon_i$.

В этом примере $x_0(t) = 1, \quad x_1(t) = t$,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & t_1 \\ ... & \\ 1 & t_n \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} IC_1 \\ ... \\ IC_n \end{pmatrix}, \; \theta = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \end{pmatrix}.$$

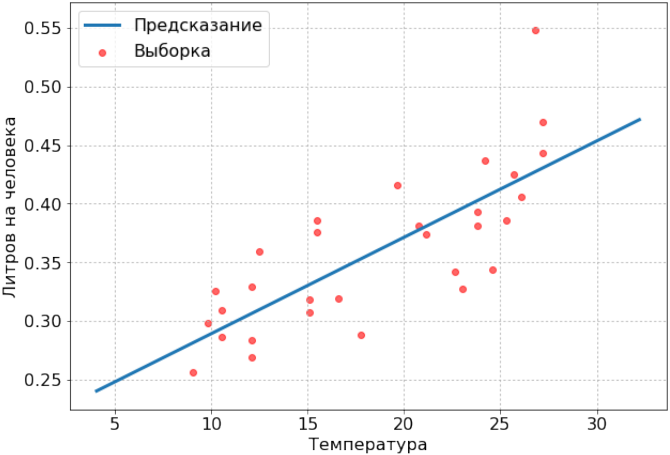
Пусть $w = I\{\text{выходной день}\}$, зависимость $ic = \theta_0 + \theta_1 t + \theta_2 t^2 w$.

Данные: $IC_i = \theta_0 + \theta_1 t_i + \theta_2 t_i^2 w_i + \varepsilon_i$.

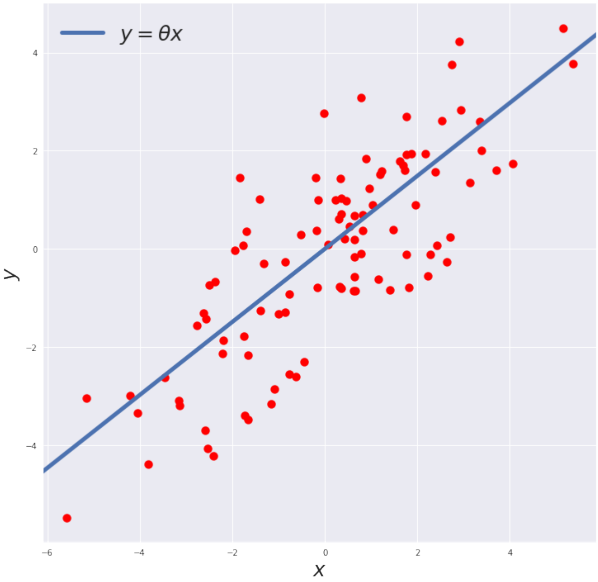
В этом примере $x_0(t, w) = 1, \quad x_1(t, w) = t, \quad x_2(t, w) = t^2 w$,

$$X = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_1^2 w_1 \\ ... & & \\ 1 & t_n & t_n^2 w_n \end{pmatrix}, \; Y = \begin{pmatrix} IC_1 \\ ... \\ IC_n \end{pmatrix}, \; \theta = \begin{pmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}.$$

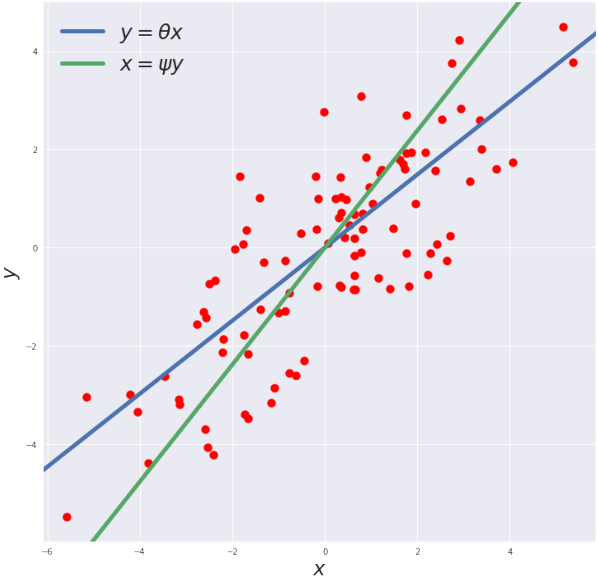
Пример: Потребление мороженого



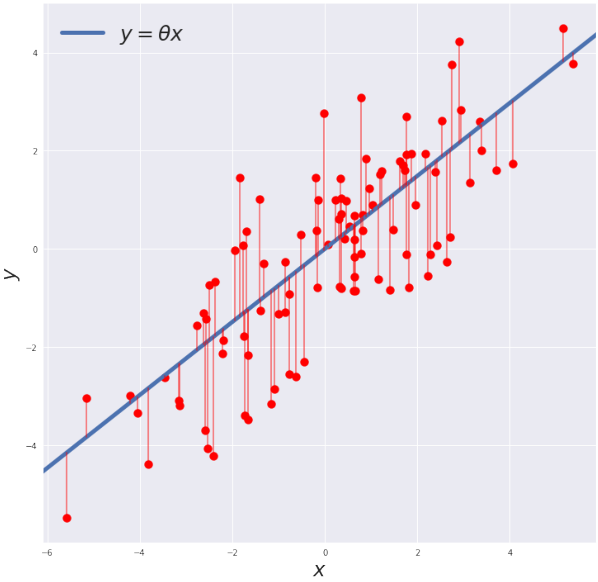
Инверсия



Инверсия



Инверсия



Инверсия